Maths 10th Unit # 2

Exercise 2.1

Q#1 Find Disc.
فرق کنندہ معلوم کریں

(i) $2x^2+3x-1=0$

$ax^2+bx+c=0$ معیاری صورت سے موازنہ کرنے سے

$a=2,\ b=3,\ c=-1$

فرق کنندہ $= \text{Disc.} = b^2-4ac$

$= (3)^2-4(2)(-1)$

$= 9+8$

$= 17$

(ii) $6x^2-8x+3=0$

$ax^2+bx+c=0$ معیاری صورت سے موازنہ کرنے سے

$a=6,\ b=-8,\ c=3$

$\text{Disc} = b^2-4ac$

$= (-8)^2-4(6)(3)$

$= 64-72$

$= -8$

(iii) $9x^2-30x+25=0$

$ax^2+bx+c=0$ معیاری صورت سے موازنہ کرنے سے

$a=9,\ b=-30,\ c=25$

$\text{Disc} = b^2-4ac$

$= (-30)^2-4(9)(25)$

$= 900-900$

$= 0$

(iv) $4x^2-7x-2=0$

$ax^2+bx+c=0$ معیاری صورت سے موازنہ کرنے سے

$a=4,\ b=-7,\ c=-2$

$\text{Disc} = b^2-4ac$

$= (-7)^2-4(4)(-2)$

$= 49+32$

$= 81$

Q#2
روٹس کی اقسام معلوم کریں اور تصدیق کریں۔

(i) $x^2-23x+120=0$

$ax^2+bx+c=0$ معیاری مساوات سے موازنہ کرنے سے

$a=1,\ b=-23,\ c=120$

$\text{Disc} = b^2-4ac$

$= (-23)^2-4(1)(120)$

$= 529-480$

$= 49$

$= (7)^2$

چونکہ یہ مثبت اور مکمل مربع ہے لہٰذا روٹس حقیقی، ناطق اور نابرابر ہیں

تصدیق۔

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-(-23) \pm \sqrt{(-23)^2-4(1)(120)}}{2(1)}$

$= \dfrac{23 \pm \sqrt{529-480}}{2}$

$= \dfrac{23 \pm \sqrt{49}}{2}$

$= \dfrac{23 \pm 7}{2}$

$x = \dfrac{23+7}{2},\quad x = \dfrac{23-7}{2}$

$= \dfrac{30}{2} = 15,\quad = \dfrac{16}{2} = 8$

$x = 15,\ x = 8$ → پس روٹس حقیقی ناطق اور نابرابر ہیں

(ii) $2x^2+3x+7=0$

$ax^2+bx+c=0$ معیاری مساوات سے موازنہ کرنے سے

$a=2,\ b=3,\ c=7$

$\text{Disc} = b^2-4ac$

$= (3)^2-4(2)(7)$

$= 9-56$

$= -47 < 0$

فرق کنندہ منفی ہے اس لیے روٹس غیر حقیقی اور نابرابر ہیں۔

تصدیق

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{(3)^2-4(2)(7)}}{2(2)}$

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-56}}{4}$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-47}}{4}$

پس روٹس غیر حقیقی اور نابرابر ہیں۔

(iii) $16x^2-24x+9=0$

$ax^2+bx+c=0$ معیاری مساوات سے موازنہ کرنے سے

$a=16,\ b=-24,\ c=9$

$\text{Disc} = b^2-4ac$

$= (-24)^2-4(16)(9)$

$= 576-576$

$= 0$

پس روٹس حقیقی، ناطق اور برابر ہیں

تصدیق

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2-4(16)(9)}}{2(16)}$

$= \dfrac{24 \pm \sqrt{576-576}}{32}$

$= \dfrac{24 \pm \sqrt{0}}{32}$

$x = \dfrac{24+0}{32},\quad x = \dfrac{24-0}{32}$

$= \dfrac{3}{4},\quad = \dfrac{3}{4}$

پس روٹس حقیقی، ناطق اور برابر ہیں

(iv) $3x^2+7x-13=0$

$ax^2+bx+c=0$ معیاری صورت سے موازنہ کرنے سے

$a=3,\ b=7,\ c=-13$

$\text{Disc} = b^2-4ac$

$= (7)^2-4(3)(-13)$

$= 49+156$

$= 205$

پس روٹس حقیقی، غیر ناطق اور نابرابر ہیں

تصدیق

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-7 \pm \sqrt{(7)^2-4(3)(-13)}}{2(3)}$

$= \dfrac{-7 \pm \sqrt{49+156}}{6}$

$= \dfrac{-7 \pm \sqrt{205}}{6}$

پس روٹس غیر ناطق اور نابرابر ہیں

31/7/13 (0300, 0313 / 723 5154)

Q#3
K کی کس قیمت کے لیے دیا ہوا جملہ $K^2x^2+2(K+1)x+4$ مکمل مربع ہے

معیاری مساوات $ax^2+bx+c=0$ سے موازنہ کرنے سے

$a=K^2,\ b=2(K+1),\ c=4$

$\text{Disc.} = b^2-4ac = 0$

$\Rightarrow [2(K+1)]^2-4(K^2)(4)=0$

$4(K^2+1+2K)-16K^2=0$

$4K^2+4+8K-16K^2=0$

$-12K^2+8K+4=0$

$3K^2-2K-1=0$ — -4 پر تقسیم کرنے سے

$3K^2-3K+K-1=0$

$3K(K-1)+1(K-1)=0$

$(K-1)(3K+1)=0$

$K-1=0$ or $3K+1=0$

$K=1$, $3K=-1$

$K=-\frac{1}{3}$

پس $K=1$ اور $K=-\frac{1}{3}$ کے لیے دیا ہوا جملہ مکمل مربع ہوگا

Q#4
(i) $(2K-1)x^2+3Kx+3=0$ روٹس برابر ہوں تو K کی قیمت معلوم کریں۔

معیاری مساوات $ax^2+bx+c=0$ سے موازنہ کرنے سے

$a=2K-1,\ b=3K,\ c=3$

چونکہ روٹس برابر ہیں لہٰذا

$\text{Disc} = b^2-4ac = 0$

(16) $(3K)^2 - 4(2K-1)(3) = 0$

$9K^2 - 12(2K-1) = 0$

$9K^2 - 24K + 12 = 0$

$3K^2 - 8K + 4 = 0$ 3 پر تقسیم کرنے سے

$3K^2 - 6K - 2K + 4 = 0$

$3K(K-2) - 2(K-2) = 0$

$(K-2)(3K-2) = 0$

$K-2 = 0$ or $3K-2 = 0$

$K = 2$ $3K = 2$

$K = 2/3$

(ii) $x^2 + 2(K+2)x + (3K+4) = 0$

معیاری مساوات $ax^2+bx+c=0$ سے موازنہ کرنے سے

$a = 1$, $b = 2(K+2)$, $c = 3K+4$

چونکہ روٹس برابر ہیں لہٰذا $Disc. = b^2 - 4ac = 0$

$[2(K+2)]^2 - 4(1)(3K+4) = 0$

$4(K^2+4+4K) - 12K - 16 = 0$

$4K^2 + 16 + 16K - 12K - 16 = 0$

$4K^2 + 4K = 0$ 4 پر تقسیم کرنے سے

$K^2 + K = 0$

$K(K+1) = 0$

$K = 0$ or $K+1 = 0$

$K = -1$

(iii) $(3K+2)x^2 - 5(K+1)x + (2K+3) = 0$

معیاری مساوات $ax^2+bx+c=0$ سے موازنہ کرنے سے

$a = 3K+2$, $b = -5(K+1)$, $c = 2K+3$

چونکہ روٹس برابر ہیں لہٰذا $Disc. = b^2 - 4ac = 0$

$[-5(K+1)]^2 - 4(3K+2)(2K+3) = 0$

$25(K^2+1+2K) - 4(6K^2+9K+4K+6) = 0$

$25K^2 + 25 + 50K - 24K^2 - 36K - 16K - 24 = 0$

$K^2 - 2K + 1 = 0$

$K^2 - K - K + 1 = 0$

$K(K-1) - 1(K-1) = 0$

$(K-1)(K-1) = 0$

$K-1 = 0$ or $K-1 = 0$

$K = 1$ $K = 1$ پس $K = 1$

Q#5

ثابت کیجئے کہ مساوات $x^2+(mx+c)^2 = a^2$ کے روٹس برابر ہونگے اگر $c^2 = a^2(1+m^2)$

$x^2 + (mx+c)^2 = a^2$

$x^2 + m^2x^2 + c^2 + 2mcx - a^2 = 0$

$x^2(1+m^2) + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$

$(1+m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$

معیاری مساوات $a'x^2+b'x+c'=0$ سے موازنہ کرنے سے

$a' = 1+m^2$, $b' = 2mc$, $c' = c^2 - a^2$

$Disc. = b'^2 - 4a'c'$

$= (2mc)^2 - 4(1+m^2)(c^2-a^2)$

(2) $= 4m^2c^2 - 4(c^2 - a^2 + m^2c^2 - m^2a^2)$

$= 4m^2c^2 - 4c^2 + 4a^2 - 4m^2c^2 + 4m^2a^2$

$= 4a^2 + 4m^2a^2 - 4c^2$ چونکہ $c^2 = a^2(1+m^2)$

$= 4a^2 + 4m^2a^2 - 4a^2(1+m^2)$

$= 4a^2 + 4m^2a^2 - 4a^2 - 4a^2m^2 = 0$

لہٰذا روٹس مساوی ہونگے

Q#6

شرط معلوم کریں کہ مساوات $(mx+c)^2 - 4ax = 0$ کے روٹس برابر ہوں۔

$(mx+c)^2 - 4ax = 0$

$m^2x^2 + c^2 + 2mcx - 4ax = 0$

$m^2x^2 + 2mcx - 4ax + c^2 = 0$

$m^2x^2 + 2(mc-2a)x + c^2 = 0$

معیاری مساوات $a'x^2+b'x+c'=0$ سے موازنہ کرنے سے

$a' = m^2$, $b' = 2(mc-2a)$, $c' = c^2$

اگر Disc. صفر کے برابر ہو تو روٹس مساوی ہوں گے۔

$Disc. = b'^2 - 4a'c' = 0$

$[2(mc-2a)]^2 - 4(m^2)(c^2) = 0$

$4(m^2c^2 + 4a^2 - 4amc) - 4m^2c^2 = 0$

$4m^2c^2 + 16a^2 - 16amc - 4m^2c^2 = 0$

$16a^2 - 16amc = 0$

$16a(a-mc) = 0$ اگر $a \neq 0$ ہو تو

$a - mc = 0$

$a = mc$

Q#7

اگر مساوات $(c^2-ab)x^2 - 2(a^2-bc)x + (b^2-ac) = 0$ کے روٹس برابر ہوں تو $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ یا $a=0$

معیاری مساوات $ax^2+bx+c=0$ سے موازنہ کرنے سے

$a' = c^2 - ab$, $b' = -2(a^2-bc)$, $c' = b^2 - ac$

روٹس مساوی ہوں گے اگر $Disc. = b'^2 - 4a'c' = 0$

$[-2(a^2-bc)]^2 - 4(c^2-ab)(b^2-ac) = 0$

$4(a^4+b^2c^2-2a^2bc) - 4(b^2c^2 - ac^3 - ab^3 + a^2bc) = 0$

4 پر تقسیم کرنے سے

$a^4 + b^2c^2 - 2a^2bc - (b^2c^2 - ac^3 - ab^3 + a^2bc) = 0$

$a^4 + b^2c^2 - 2a^2bc - b^2c^2 + ac^3 + ab^3 - a^2bc = 0$

$a^4 + ab^3 + ac^3 - 3a^2bc = 0$

$a(a^3+b^3+c^3-3abc) = 0$

$a = 0$ or $a^3+b^3+c^3-3abc = 0$

$a^3+b^3+c^3 = 3abc$ (proved)

Q#8

ثابت کیجئے کہ روٹس ناطق ہیں۔

(i) $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$

روٹس ناطق ہوں گے اگر فرق کنندہ (Disc.) ایک مکمل مربع ہو۔

$a' = a(b-c)$, $b' = b(c-a)$, $c' = c(a-b)$

$Disc. = b'^2 - 4a'c'$

$= [b(c-a)]^2 - 4a(b-c)c(a-b)$

$= b^2(c^2+a^2-2ac) - 4ac(ab-b^2-ac+bc)$

$= b^2c^2 + a^2b^2 - 2ab^2c - 4a^2bc + 4ab^2c + 4a^2c^2 - 4abc^2$

$= a^2b^2 + b^2c^2 + 4c^2a^2 + 2ab^2c - 4abc^2 - 4a^2bc$

$= (ab)^2 + (bc)^2 + (-2ca)^2 + 2(ab)(bc) + 2(bc)(-2ca) + 2(-2ca)(ab)$

$= (ab + bc - 2ca)^2 > 0$

complete square

چونکہ Disc ایک مکمل مربع اور مثبت ہے لہٰذا روٹس ناطق ہیں۔

(ii) $(a+2b)x^2 + 2(a+b+c)x + (a+2c) = 0$

معیاری مساوات $a'x^2 + b'x + c' = 0$ سے موازنہ کرنے سے

$a' = a+2b, \quad b' = 2(a+b+c), \quad c' = a+2c$

$Disc. = b'^2 - 4a'c'$

$= [2(a+b+c)]^2 - 4(a+2b)(a+2c)$

$= 4(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) - 4(a^2+2ac+2ab+4bc)$

$= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8ab + 8bc + 8ca - 4a^2 - 8ac - 8ab - 16bc$

$= 4b^2 + 4c^2 - 8bc$

$= 4(b^2 + c^2 - 2bc)$

$= [2(b-c)]^2 > 0$

چونکہ Disc ایک مکمل مربع اور مثبت ہے لہٰذا روٹس ناطق ہیں۔

Q#9

K کی تمام قیمتوں کے لیے مساوات $x^2 - 2\left(K + \frac{1}{K}\right)x + 3 = 0 \quad (K \neq 0)$ کے روٹس حقیقی ہیں۔

معیاری مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے سے

$a = 1, \quad b = -2\left(K + \frac{1}{K}\right), \quad c = 3$

$Disc = b^2 - 4ac$

$= \left[-2\left(K + \frac{1}{K}\right)\right]^2 - 4(1)(3)$

$= 4\left(K + \frac{1}{K}\right)^2 - 12 = 4\left[\left(K + \frac{1}{K}\right)^2 - 3\right]$

$= 4\left[K^2 + \frac{1}{K^2} + 2 - 3\right] = 4\left[K^2 + \frac{1}{K^2} - 1\right]$

$= 4\left[K^2 + \frac{1}{K^2} - 2 + 2 - 1\right] = 4\left[K^2 + \frac{1}{K^2} - 2 + 1\right]$

$= 4\left[\left(K - \frac{1}{K}\right)^2 + 1\right] > 0 \quad (K \neq 0)$

K کی کسی بھی قیمت کے لیے Disc. مثبت ہے لہٰذا مساوات کے روٹس حقیقی ہیں۔

Q#10

ثابت کریں مساوات $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$ کے روٹس حقیقی ہیں۔

معیاری مساوات $a'x^2 + b'x + c' = 0$ سے موازنہ کرنے سے

$a' = b-c, \quad b' = c-a, \quad c' = a-b$

$Disc. = b^2 - 4ac$

$= (c-a)^2 - 4(b-c)(a-b)$

$= c^2 + a^2 - 2ca - 4(ab - b^2 - ca + bc)$

$= c^2 + a^2 - 2ca - 4ab + 4b^2 + 4ca - 4bc$

$= a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ab - 4bc + 2ca$

(3) $= (a)^2 + (-2b)^2 + (c)^2 + 2(a)(-2b) + 2(-2b)(c) + 2(c)(a)$

$= (a - 2b + c)^2 > 0$

چونکہ Disc. کی قیمت مثبت ہے لہٰذا روٹس حقیقی ہیں۔

Exercise 2.2

Q#1

$1-, 8, 27-, 64$ کے جذر المکعب معلوم کریں۔

(i) $x = (-1)^{1/3}$

$x^3 = -1$

$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x)^3 + (1)^3 = 0$

$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x + 1 = 0$ or $x^2 - x + 1 = 0$

$\boxed{x = -1}$ معیاری صورت سے موازنہ کرنے سے

$a = 1, b = -1, c = 1$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$

$= -\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right), \quad x = -\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)$

$= -\omega^2, \quad x = -\omega$

$\because \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \omega$

$\& \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \omega^2$

پس $1-$ کے جذر المکعب ہیں

$-1, -\omega, -\omega^2$

(ii) $x = (8)^{1/3}$

$x^3 = 8$

$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow (x)^3 - (2)^3 = 0$

$(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

$x - 2 = 0$ or $x^2 + 2x + 4 = 0$

$\boxed{x = 2}$ معیاری صورت سے موازنہ کرنے سے

$a = 1, b = 2, c = 4$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times -3}}{2}$

$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{-3}}{2}$

$= \frac{2(-1 \pm \sqrt{-3})}{2}$

$= 2\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right), \quad x = 2\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)$

$= 2\omega, \quad 2\omega^2$

پس 8 کے جذر المکعب ہیں

$2, 2\omega, 2\omega^2$

(iii) $x = (-27)^{1/3}$

$x^3 = -27$

$x^3 + 27 = 0$

$(x)^3 + (3)^3 = 0$

$(x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$x + 3 = 0$ or $x^2 - 3x + 9 = 0$

$\boxed{x = -3}$ موازنہ کرنے سے

$a = 1, b = -3, c = 9$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$

(iv) $x = (64)^{1/3}$

$x^3 = 64$

$x^3 - 64 = 0$

$(x)^3 - (4)^3 = 0$

$(x-4)(x^2 + 4x + 16) = 0$

$x - 4 = 0$ or $x^2 + 4x + 16 = 0$

$\boxed{x = 4}$ موازنہ کرنے سے

$a = 1, b = 4, c = 16$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9-36}}{2}$

$=\frac{3\pm\sqrt{-27}}{2}$

$=\frac{3\pm\sqrt{9\times-3}}{2}$

$=\frac{3\pm3\sqrt{-3}}{2}$

$x=-\left(\frac{3-3\sqrt{-3}}{2}\right)$, $x=-\left(\frac{-3+3\sqrt{-3}}{2}\right)$

$=-3\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right), -3\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$

$=-3\omega \ , \ -3\omega^2$

پس −27 کے جذرالمکعب ہیں

$-3, -3\omega, -3\omega^2$

$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-64}}{2}$

$=\frac{-4\pm\sqrt{-48}}{2}$

$=\frac{-4\pm\sqrt{16\times-3}}{2}$

$=\frac{-4\pm4\sqrt{-3}}{2}$

$=+4\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)$

$x=+4\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right), +4\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$

$=+4\omega \ , \ 4\omega^2$

پس 64 کے جذرالمکعب ہیں

$4, 4\omega, 4\omega^2$

(vii) $\omega^{37}+\omega^{38}-5$

$=\omega^{36}\cdot\omega+\omega^{36}\cdot\omega^2-5$

$=(\omega^3)^{12}\cdot\omega+(\omega^3)^{12}\cdot\omega^2-5$

$=(1)^{12}\cdot\omega+(1)^{12}\cdot\omega^2-5$

$=1\cdot\omega+1\cdot\omega^2-5$

$=\omega+\omega^2-5$

$=-1-5 \quad \because \omega+\omega^2=-1$

$=-6$

(viii) $\omega^{-13}+\omega^{-17}$

$=\frac{1}{\omega^{13}}+\frac{1}{\omega^{17}}$

$=\frac{1}{\omega^{12}\cdot\omega}+\frac{1}{\omega^{15}\cdot\omega^2}$

$=\frac{1}{(\omega^3)^4\cdot\omega}+\frac{1}{(\omega^3)^5\cdot\omega^2}$

$=\frac{1}{(1)^4\cdot\omega}+\frac{1}{(1)^5\cdot\omega^2}$

$=\frac{1}{1\cdot\omega}+\frac{1}{1\cdot\omega^2}=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}$

$=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}$

$=-1$

Q#2

قیمت معلوم کریں۔

(i) $(1-\omega-\omega^2)^7$

$=[1-(\omega+\omega^2)]^7$

$=[1-(-1)]^7 \quad \because \omega+\omega^2=-1$

$=(1+1)^7$

$=(2)^7$

$=128$

(iii) $(9+4\omega+4\omega^2)^3$

$=[9+4(\omega+\omega^2)]^3$

$=[9+4(-1)]^3 \quad \because \omega+\omega^2=-1$

$=(9-4)^3$

$=(5)^3$

$=125$

(ii) $(1-3\omega-3\omega^2)^5$

$=[1-3(\omega+\omega^2)]^5$

$=[1-3(-1)]^5 \quad \because \omega+\omega^2=-1$

$=(1+3)^5$

$=(4)^5=1024$

(iv) $(2+2\omega-2\omega^2)(3-3\omega+3\omega^2)$

$=[2(1+\omega-\omega^2)][3(1-\omega+\omega^2)]$

$=[2(-\omega^2-\omega^2)][3(1+\omega^2-\omega)]$

$=[2(-2\omega^2)][3(-\omega-\omega)]$

$=(-4\omega^2)[3(-2\omega)]$

$=(-4\omega^2)(-6\omega)$

$=24\omega^3=24(1)=24$

(v) $(-1+\sqrt{-3})^6+(-1-\sqrt{-3})^6$

چونکہ $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\omega$

لہٰذا $-1+\sqrt{-3}=2\omega$

اور $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\omega^2$

لہٰذا $-1-\sqrt{-3}=2\omega^2$

قیمتیں درج کرنے سے

$(2\omega)^6+(2\omega^2)^6$

$=2^6\omega^6+2^6\omega^{12}$

$=64(\omega^3)^2+64(\omega^3)^4$

$=64(1)^2+64(1)^4 \quad \because \omega^3=1$

$=64(1)+64(1)$

$=64+64$

$=128$

(vi) $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^9+\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^9$

چونکہ $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\omega \ \& \ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\omega^2\right)$

$=(\omega)^9+(\omega^2)^9$

$=\omega^9+\omega^{18}$

$=(\omega^3)^3+(\omega^3)^6$

$=(1)^3+(1)^6$

$=1+1$

$=2$

Q#3

ثابت کیجئے کہ $x^3+y^3=(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$

RHS $=(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$

$=(x+y)(x^2+xy\omega^2+xy\omega+\omega^3y^2)$

$=(x+y)[x^2+(\omega^2+\omega)xy+\omega^3y^2]$

$=(x+y)(x^2+(-1)xy+(1)y^2)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x)^3+(y)^3=x^3+y^3$

$=$ LHS.

Q#4

ثابت کیجئے کہ $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+y\omega+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z)$.

RHS $=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z)$.

$=(x+y+z)(x^2+xy\omega^2+xz\omega+xy\omega+y^2\omega^3+yz\omega^2+xz\omega^2+yz\omega^4+z^2\omega^3)$

$=(x+y+z)(x^2+xy\omega^2+xy\omega+yz\omega^2+yz\omega^3\cdot\omega+zx\omega+zx\omega^2+y^2\omega^3+z^2\omega^3)$.

$=(x+y+z)[x^2+(\omega^2+\omega)xy+(\omega^2+\omega^3\cdot\omega)yz+(\omega+\omega^2)zx+y^2(1)+z^2(1)]$

$=(x+y+z)[x^2+(-1)xy+(\omega^2+1\cdot\omega)yz+(-1)zx+y^2+z^2]$

$=(x+y+z)(x^2-xy+(-1)yz-zx+y^2+z^2)$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=(x)^3+(y)^3+(z)^3-3(x)(y)(z)$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Q#5

ثابت کیجئے کہ

$(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)$........ to 2n factors $=$

LHS $=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)$...... to 2n factors

$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3\cdot\omega)(1+\omega^6\cdot\omega^2)$...... "

$= (1+\omega)(1+\omega^2)(1+1\cdot\omega)(1+(\omega^3)^2\cdot\omega^2) \ldots\ldots 2n$ factors

$= (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega)(1+(1)\omega^2) \ldots\ldots 2n$ factors

$= [(1+\omega)(1+\omega^2)][(1+\omega)(1+\omega^2)] \ldots\ldots n$ factors

$= [(1+\omega)(1+\omega^2)]^n$

$= (1+\omega^2+\omega+\omega^3)^n = (1+\omega+\omega^2+\omega^3)^n$

$= (0+1)^n = (1)^n \quad \because 1+\omega+\omega^2=0$

$= 1 =$ RHS.

Exercise 2.3

Q#1

حل کیے بغیر مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $x^2-5x+3=0$

فرض کیا α, β مساوات کے روٹس ہیں

یہاں $a=1, b=-5, c=3$

مجموعہ $= \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-5)}{1} = 5$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$

(ii) $3x^2+7x-11=0$

فرض کیا α, β مساوات کے روٹس ہیں

یہاں $a=3, b=7, c=-11$

مجموعہ $= \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{3}$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{11}{3}$

(iii) $px^2-qx+r=0$

فرض کیا α, β مساوات کے روٹس ہیں

یہاں $a=p, b=-q, c=r$

مجموعہ $= \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-q)}{p} = \frac{q}{p}$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{r}{p}$

(iv) $(a+b)x^2-ax+b=0$

فرض کیا α, β مساوات کے روٹس ہیں

یہاں $a'=a+b, b'=-a, c'=b$

مجموعہ $= \alpha+\beta = \frac{-b'}{a'} = \frac{-(-a)}{a+b} = \frac{a}{a+b}$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c'}{a'} = \frac{b}{a+b}$

(v) $(l+m)x^2+(m+n)x+n-l=0$

فرض کیا α, β مساوات کے روٹس ہیں

یہاں $a=l+m, b=m+n, c=n-l$

مجموعہ $= \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(m+n)}{l+m}$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{n-l}{l+m}$

(vi) $7x^2-5mx+9n=0$

فرض کیا α, β مساوات کے روٹس ہیں

یہاں $a=7, b=-5m, c=9n$

مجموعہ $= \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5m)}{7} = \frac{5m}{7}$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{9n}{7}$

Q#2

K کی قیمت معلوم کریں

(i) $2kx^2-3x+4k=0$ روٹس کا مجموعہ اس کے روٹس کے حاصل ضرب کا دوگنا ہو۔

فرض کیا α, β مساوات کے روٹس ہیں

مجموعہ $= \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-3)}{2k} = 3/2k$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4k}{2k} = 2$

بشرط سوال

$\alpha+\beta = 2(\alpha\beta)$

$\frac{3}{2k} = 2(2)$

$\frac{3}{2k} = 4$

$3 = 8k$

$\boxed{k = \frac{3}{8}}$

(ii) $x^2+(3k-7)x+5k=0$ مساوات کے روٹس کا مجموعہ اس کے روٹس کے حاصل ضرب کا 3/2 گنا ہو۔

فرض کیا α, β مساوات کے روٹس ہیں۔

$a=1, b=3k-7, c=5k$

مجموعہ $= \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(3k-7)}{1}$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{5k}{1} = 5k$

بشرط سوال

$\alpha+\beta = \frac{3}{2}(\alpha\beta)$

$-(3k-7) = \frac{3}{2}(5k)$

$-2(3k-7) = 3(5k)$

$-6k+14 = 15k$

$14 = 15k+6k = 21k$

$k = \frac{14}{21} = 2/3 \quad \boxed{k = \frac{2}{3}}$

Q#3

K کی قیمت معلوم کریں

(i) مساوات $4kx^2+3kx-8=0$ کے روٹس کے مربعوں کا مجموعہ 2 ہو۔

فرض کیا α, β مساوات کے روٹس ہیں

$a=4k, b=3k, c=-8$

مجموعہ $= \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = \frac{-3k}{4k} = -\frac{3}{4}$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-8}{4k} = \frac{-2}{k}$

بشرط سوال

$\alpha^2+\beta^2 = 2$

$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta = 2$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = 2$

$(-\frac{3}{4})^2 - 2(-\frac{2}{k}) = 2$

$\frac{9}{16}+\frac{4}{k} = 2$

16k سے ضرب دینے سے

$\frac{9}{16}\times 16k + \frac{4}{k}\times 16k = 2\times 16k$

$9k+64 = 32k$

$64 = 32k-9k = 23k$

$k = \frac{64}{23}$

(ii) مساوات $x^2-2kx+(2k+1)$ کے روٹس کے مربعوں کا مجموعہ 6 ہو۔

فرض کیا α, β مساوات کے روٹس ہیں $a=1, b=-2k, c=2k+1$

مجموعہ $= \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2k)}{1} = 2k$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2k+1}{1} = 2k+1$

بشرط سوال

$\alpha^2+\beta^2 = 6$

$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta = 6$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = 6$

$(2k)^2-2(2k+1) = 6$

$4k^2-4k-2-6=0$

$4k^2-4k-8=0$

4 پر تقسیم کرنے سے

$k^2-k-2=0$

$k^2-2k+k-2=0$

$k(k-2)+1(k-2)=0$

$(k-2)(k+1)=0$

$k-2=0$ or $k+1=0$

$k=2 \quad k=-1$

$k = 2, -1$

Q#4

(i) مساوات $x^2 - x + p^2 = 0$ کے روٹس میں 1 کا فرق ہو تو p کی قیمت معلوم کریں۔ (6)

فرض کیا α اور $\alpha - 1$ مساوات کے روٹس ہیں۔

$\alpha = 1, b = -1, c = p^2$

مجموعہ $= \alpha + \alpha - 1 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{1} = 1$

$2\alpha - 1 = 1$

$2\alpha = 1 + 1 = 2$

$2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

حاصل ضرب $= (\alpha)(\alpha - 1) = \frac{c}{a} = \frac{p^2}{1} = p^2$

$\alpha^2 - \alpha = p^2$

$(1)^2 - 1 = p^2$

$1 - 1 = p^2$

$0 = p^2$

$p = 0$

(ii) مساوات $x^2 + 3x + p - 2 = 0$ کے روٹس میں 2 کا فرق ہو

فرض کیا α اور $\alpha - 2$ مساوات کے روٹس ہیں۔

$a = 1$, $b = 3$, $c = p - 2$

مجموعہ $= \alpha + \alpha - 2 = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{1}$

$2\alpha - 2 = -3$

$2\alpha = -3 + 2$

$2\alpha = -1 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{2}}$

حاصل ضرب $= (\alpha)(\alpha - 2) = \frac{c}{a} = \frac{p-2}{1}$

$(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2} - \frac{2}{1}) = p - 2$

$-\frac{1}{2}(\frac{-1-4}{2}) = p - 2$

$-\frac{1}{2}(-\frac{5}{2}) = p - 2$

$\frac{5}{4} = p - 2 \Rightarrow 5 = 4p - 8$

$4p = 5 + 8 = 13 \Rightarrow p = 13/4$

Q#5

(i) مساوات $x^2 - 7x + 3m - 5 = 0$ کے روٹس $3\alpha + 2\beta = 4$ کو ثابت کریں، m کی قیمت معلوم کریں

فرض کیا α، β مساوات کے روٹس ہیں۔

$a = 1$, $b = -7$, $c = 3m - 5$

مجموعہ $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{1} = 7$

$\alpha + \beta = 7 \longrightarrow (i)$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3m-5}{1} = 3m - 5$

$\alpha\beta = 3m - 5 \longrightarrow (ii)$

$\alpha = 7 - \beta \longrightarrow (iii)$ مساوات نمبر (i) سے

$3\alpha + 2\beta = 4$ دی گئی مساوات

$3(7 - \beta) + 2\beta = 4$ α کی قیمت درج کرنے سے

$21 - 3\beta + 2\beta = 4$

$21 - \beta = 4 \Rightarrow -\beta = 4 - 21$

$-\beta = -17 \Rightarrow \boxed{\beta = 17}$

β کی قیمت مساوات (iii) میں درج کرنے سے

$\alpha = 7 - \beta = 7 - 17 \Rightarrow \boxed{\alpha = -10}$

α، β کی قیمتیں مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$\alpha\beta = 3m - 5$

$(-10)(17) = 3m - 5$

$-170 = 3m - 5$

$-170 + 5 = 3m$

$3m = -165$

$m = \frac{-165}{3}$ (55)

$\boxed{m = -55}$

Second Method

مجموعہ $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{1} = 7$

$\alpha + \beta = 7 \longrightarrow (i)$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{c}{a} = \frac{3m-5}{1} = 3m - 5$

$\alpha\beta = 3m - 5 \longrightarrow (ii)$

$3\alpha + 2\beta = 4 \longrightarrow (iii)$ دی گئی مساوات

$\pm 2\alpha \pm 2\beta = \pm 14$ مساوات نمبر (i) کو 2 سے ضرب دی

$\alpha \quad = -10$ تفریق کرنے سے

$\alpha + \beta = 7$ α کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$-10 + \beta = 7$

$\beta = 7 + 10 = 17 \Rightarrow \boxed{\beta = 17}$

$\alpha\beta = 3m - 5$ α، β کی قیمتیں مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$(-10)(17) = 3m - 5$

$-170 = 3m - 5$

$-170 + 5 = 3m \Rightarrow 3m = -165$

$m = -165/3 = -55 \Rightarrow \boxed{m = -55}$

(ii) مساوات $x^2 + 7x + 3m - 5 = 0$ کے روٹس دیے گئے تعلق $3\alpha - 2\beta = 4$ کو ثابت کریں۔

$a = 1$, $b = 7$, $c = 3m - 5$

مجموعہ $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{1} = -7$

$\alpha + \beta = -7 \longrightarrow (i)$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3m-5}{1}$

$\alpha\beta = 3m - 5 \longrightarrow (ii)$

$3\alpha - 2\beta = 4$ دی گئی مساوات

$2\alpha + 2\beta = -14$ مساوات (i) کو 2 سے ضرب دی

$5\alpha \quad = -10$ جمع کرنے سے

$\alpha = -10/5 = -2 \quad \boxed{\alpha = -2}$

$\alpha + \beta = -7$ α کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$-2 + \beta = -7$

$\beta = -7 + 2 = -5 \Rightarrow \boxed{\beta = -5}$

α اور β کی قیمتیں مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$\alpha\beta = 3m - 5$

$(-2)(-5) = 3m - 5$

$10 = 3m - 5$

$3m = 10 + 5 = 15$

$m = 15/3 = 5 \Rightarrow \boxed{m = 5}$

(iii) مساوات $3x^2 - 2x + 7m + 2 = 0$ کے روٹس دیے گئے تعلق $7\alpha - 3\beta = 18$ کو ثابت کریں۔

$a = 3$, $b = -2$, $c = 7m + 2$

مجموعہ $= \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-2)}{3} = \frac{2}{3}$

$\alpha + \beta = \frac{2}{3}$

$3\alpha + 3\beta = 2 \longrightarrow (i)$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{7m+2}{3}$

$3\alpha\beta = 7m + 2 \longrightarrow (ii)$

www.pakcity.org

$$7\alpha - 3\beta = 18$$
$$3\alpha + 3\beta = 2$$
$$10\alpha = 20$$

دی گئی مساوات
مساوات (i) سے
جمع کرنے سے

$$\alpha = \frac{20}{10} = 2 \quad \boxed{\alpha = 2}$$

α کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$3\alpha + 3\beta = 2$$
$$3(2) + 3\beta = 2$$
$$6 + 3\beta = 2$$
$$3\beta = 2 - 6 = -4 \Rightarrow \boxed{\beta = -\frac{4}{3}}$$

α اور β کی قیمتیں مساوات (iii) میں درج کرنے سے

$$3\alpha\beta = 7m + 2$$
$$3(2)\left(-\frac{4}{3}\right) = 7m + 2$$
$$-8 = 7m + 2$$
$$-8 - 2 = 7m$$
$$7m = -10 \Rightarrow \boxed{m = \frac{-10}{7}}$$

Q#6

m کی قیمت معلوم کریں۔ اگر روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب دونوں اپنا دیے گئے عدد λ کے برابر ہوں۔

(i) $(2m+3)x^2 + (7m-5)x + (3m-10) = 0$

مجموعہ $= \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ $\qquad a = 2m+3$

$\alpha + \beta = \frac{-(7m-5)}{2m+3}$ $\qquad b = 7m-5$, $c = 3m-10$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3m-10}{2m+3}$

$\alpha + \beta = \lambda \rightarrow (i)$, $\alpha\beta = \lambda \rightarrow (ii)$ دی گئی شرط کے مطابق

$\alpha + \beta = \alpha\beta$ آپس میں (i) اور (ii) سے

$$\frac{-(7m-5)}{2m+3} = \frac{3m-10}{2m+3}$$

$-(7m-5) = 3m - 10$ 2m+3 سے ضرب دینے سے

$$-7m + 5 = 3m - 10$$
$$-7m - 3m = -10 - 5$$
$$-10m = -15$$
$$10m = 15 \Rightarrow m = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

(ii) $4x^2 - (3+5m)x - (9m-17) = 0$

مجموعہ $= \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{(-)(3+5m)}{4}$ $\qquad a = 4$, $b = -(3+5m)$, $c = -(9m-17)$

$$\alpha + \beta = \frac{3+5m}{4}$$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{(-)(9m-17)}{4}$

$$\alpha\beta = \frac{9m-17}{4}$$

$\alpha + \beta = \lambda \rightarrow (i)$ $\quad \alpha\beta = \lambda \rightarrow (ii)$ بشرط سوال

$\alpha + \beta = \alpha\beta$ (i) اور (ii) سے

$$\frac{3+5m}{4} = \frac{-(9m-17)}{4}$$

4 سے ضرب دینے سے

$$3 + 5m = -9m + 17$$
$$5m + 9m = 17 - 3$$
$$14m = 14$$
$$m = \frac{14}{14} \quad \boxed{m = 1}$$

Exercise 2.4

Q#1

اگر α، β مساوات $x^2 + px + q = 0$ کے روٹس ہوں تو قیمت معلوم کریں.....

$$a = 1,\ b = p,\ c = q$$
$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-p}{1} = -p$$
$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{q}{1} = q$$

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = ?$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta$$
$$= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$$
$$= (-p)^2 - 2(q)$$
$$= p^2 - 2q$$

(ii) $\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = ?$

$$\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$
$$= \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta)$$
$$= \alpha\beta[(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]$$
$$= q[(-p)^2 - 2(q)]$$
$$= q(p^2 - 2q)$$

(iii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$$
$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$= \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{(-p)^2 - 2(q)}{q}$$
$$= \frac{p^2 - 2q}{q}$$

Q#2

اگر α، β مساوات $4x^2 - 5x + 6 = 0$ کے روٹس ہوں تو قیمت معلوم کریں۔

$$a = 4,\ b = -5,\ c = 6$$
$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-5)}{4} = \frac{5}{4}$$
$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

(i) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

$$= \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{5/4}{3/2} = \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

(ii) $\alpha^2\beta^2$

$$= (\alpha\beta)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

(iii) $\frac{1}{\alpha^2\beta} + \frac{1}{\alpha\beta^2}$

$$= \frac{\beta + \alpha}{\alpha^2\beta^2} = \frac{\alpha+\beta}{(\alpha\beta)^2}$$
$$= \frac{5/4}{(3/2)^2} = \frac{5/4}{9/4}$$
$$= \frac{5}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

(iv) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

$$= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha\beta}$$
$$= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta - \alpha\beta)}{\alpha\beta}$$
$$= \frac{(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta]}{\alpha\beta}$$
$$= \frac{5/4\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right)\right]}{3/2} = \frac{\frac{5}{4}\left(\frac{25}{16} - \frac{9}{2}\right)}{3/2}$$
$$= \frac{5/4\left(\frac{25-72}{16}\right)}{3/2} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}\left(\frac{-47}{16}\right) = -\frac{235}{96}$$

Q#3 اگر α, β مساوات $lx^2+mx+n=0$ کے روٹس ہوں تو قیمت معلوم کریں۔ (8)

$\because \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{-m}{l}$ $\quad a=l$

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{n}{l}$ $\quad b=m,\ c=n$

(i) $\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3$

$= \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

$= (\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)$

$= \left(\frac{n}{l}\right)^2\left(-\frac{m}{l}\right)$

$= \left(\frac{n^2}{l^2}\right)\left(-\frac{m}{l}\right)$

$= -\frac{mn^2}{l^3}$

(ii) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

$= \frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$= \frac{\left(-\frac{m}{l}\right)^2-2\left(\frac{n}{l}\right)}{\left(\frac{n}{l}\right)^2}$

$= \frac{\frac{m^2}{l^2}-\frac{2n}{l}}{\frac{n^2}{l^2}} = \frac{\frac{m^2-2nl}{l^2}}{\frac{n^2}{l^2}}$

$= \frac{m^2-2nl}{l^2}\times\frac{l^2}{n^2}$

$= \frac{m^2-2nl}{n^2}$

Q#2 اگر α, β مساوات $x^2-3x+6=0$ کے روٹس ہوں تو درج ذیل روٹس سے مساواتیں بنائیں۔

$\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3$ $\quad a=1,\ b=-3,\ c=6$

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$

(a) $2\alpha+1,\ 2\beta+1$

مجموعہ $= S = 2\alpha+1+2\beta+1$

$S = 2\alpha+2\beta+2$

$= 2(\alpha+\beta)+2$

$= 2(3)+2$

$= 6+2$

$= 8 \Rightarrow \boxed{S=8}$

حاصل ضرب $= P = (2\alpha+1)(2\beta+1)$

$P = 4\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1$

$= 4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$

$= 4(6)+2(3)+1 = 24+6+1 = 31 \Rightarrow \boxed{P=31}$

پس مطلوبہ دو درجی مساوات

$x^2-Sx+P=0$

$x^2-8x+31=0$

(b) α^2, β^2

مجموعہ $= S = \alpha^2+\beta^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta$

$S = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$= (3)^2-2(6) = 9-12 = -3 \Rightarrow \boxed{S=-3}$

حاصل ضرب $= P = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$

$P = (6)^2 = 36 \Rightarrow \boxed{P=36}$

مطلوبہ مساوات

$x^2-Sx+P=0$

$x^2-(-3)x+36=0$

$x^2+3x+36=0$

(c) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

مجموعہ $= S = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

$S = \frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

حاصل ضرب $= P = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)$

$P = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{6}$

مطلوبہ مساوات

$x^2-Sx+P=0$

$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}=0$

6 سے ضرب دینے سے

$6x^2-3x+1=0$

(d) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

مجموعہ $= S = \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

$S = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$= \frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{(3)^2-2(6)}{6} = \frac{9-12}{6}$

$= -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

حاصل ضرب $= P = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

$P = 1$

مطلوبہ مساوات

$x^2-Sx+P=0$

$x^2-\left(-\frac{1}{2}\right)x+1=0$

$x^2+\frac{1}{2}x+1=0$

$2x^2+x+2=0$

Exercise 2.5

Q#1 دو درجی مساواتیں لکھیں

(a) $1, 5$

روٹس کا مجموعہ $= S = 1+5 = 6$

حاصل ضرب $= P = (1)(5) = 5$

مطلوبہ دو درجی مساوات

$x^2-Sx+P=0$

$x^2-6x+5=0$

(b) $4, 9$

روٹس کا مجموعہ $= S = 4+9 = 13$

حاصل ضرب $= P = (4)(9) = 36$

مطلوبہ مساوات

$x^2-Sx+P=0$

$x^2-13x+36=0$

(c) $-2, 3$

روٹس کا مجموعہ $= S = -2+3 = 1$

حاصل ضرب $= P = (-2)(3) = -6$

مطلوبہ مساوات

$x^2-Sx+P=0$

$x^2-x-6=0$

(d) $0, -3$

روٹس کا مجموعہ $= S = 0-3 = -3$

حاصل ضرب $= P = (0)(-3) = 0$

مطلوبہ مساوات

$x^2-Sx+P=0$

$x^2-(-3)x+0=0$

$x^2+3x=0$

(e) $2, -6$

روٹس کا مجموعہ $= S = 2-6 = -4$

حاصل ضرب $= P = (2)(-6) = -12$

مطلوبہ مساوات

$x^2-Sx+P=0$

$x^2-(-4)x-12=0$

$x^2+4x-12=0$

(f) $-1, -7$

روٹس کا مجموعہ $= S = -1-7 = -8$

حاصل ضرب $= P = (-1)(-7) = 7$

مطلوبہ مساوات

$x^2-Sx+P=0$

$x^2-(-8)x+7=0$

$x^2+8x+7=0$

(g) $1+i, 1-i$

روٹس کا مجموعہ $= S = 1+i+1-i = 2$

حاصل ضرب $= P = (1+i)(1-i)$

$= 1-i^2 = 1-(-1) = 1+1 = 2$

مطلوبہ مساوات

$x^2-Sx+P=0$

$x-2x+2=0$

(h) $3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}$

روٹس کا مجموعہ $= S = 3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2} = 6$

حاصل ضرب $= P = (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$

$P = (3)^2-(\sqrt{2})^2 = 9-2 = 7$

مطلوبہ مساوات

$x^2-Sx+P=0$

$x^2-6x+7=0$

(e) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

مجموعہ $= S = \alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \alpha+\beta+\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}$

$S = 3+\frac{3}{6} = \frac{18+3}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

حاصل ضرب $= P = (\alpha+\beta)(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})$

$P = (\alpha+\beta)(\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}) = (3)(\frac{3}{6}) = \frac{3}{2}$

مطلوبہ مساوات

$x^2 - Sx + P = 0$

$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

Q#3

اگر α اور β مساوات $x^2+px+q=0$ کے روٹس ہوں تو درج ذیل روٹس والی مساواتیں بنائیں۔

$\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{p}{1} = -p$ $\quad a=1$, $b=p$

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{q}{1} = q$ $\quad c=q$

(a) α^2, β^2

مجموعہ $= S = \alpha^2+\beta^2$

$S = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta$

$= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (-p)^2 - 2(q)$

$= p^2 - 2q$

حاصل ضرب $= P = (\alpha^2)(\beta^2)$

$P = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$

$= (q)^2 = q^2$

مطلوبہ مساوات

$x^2 - Sx + P = 0$

$x^2 - (p^2-2q)x + q^2 = 0$

(b) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

مجموعہ $= S = \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

$S = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$= \frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$= \frac{(-p)^2-2(q)}{q}$

$= \frac{p^2-2q}{q}$

حاصل ضرب $= P = (\frac{\alpha}{\beta})(\frac{\beta}{\alpha})$

$P = 1$

مطلوبہ مساوات

$x^2 - Sx + P = 0$

$x^2 - \frac{p^2-2q}{q}x + 1 = 0$

$qx^2 - (p^2-2q)x + q = 0$

Exercise 2.6

Q#1

ترکیبی تقسیم سے حاصل قسمت اور باقی معلوم کریں۔

(i) $(x^2+7x-1) \div (x+1)$

یہاں تقسیم کنندہ $x-a$ میں

$x-a = x+1$

$a = -1$

عددی سروں کو ایک قطار میں لکھتے ہیں

	1	7	−1
−1	↓	−1	−6
	1	6	−7

حاصل قسمت $= Q(x) = x+6$

باقی $= R = -7$

(ii) $(4x^3-5x+15) \div (x+3)$

یہاں $x-a = x+3$

$a = -3$

عددی سروں کو قطار میں لکھتے ہیں

(غیر موجود متغیر کا عددی سر صفر لکھیں گے)

	4	0	−5	15
−3	↓	−12	36	−93
	4	−12	31	−78

حاصل قسمت $= Q(x) = 4x^2-12x+31$

باقی $= R = -78$

(iii) $(x^3+x^2-3x+2) \div (x-2)$

یہاں $x-a = x-2$

$a = 2$

عددی سروں کو قطار میں لکھتے ہیں

	1	1	−3	2
2	↓	2	6	6
	1	3	3	8

حاصل قسمت $= Q(x) = x^2+3x+3$

باقی $= R = 8$

Q#2

ترکیبی تقسیم کے استعمال سے h کی قیمت معلوم کریں۔ اگر

(i) عدد '3' کثیر رقمی $2x^3-3hx^2+9$ کا زیرو ہو۔

	2	−3h	0	9
3	↓	6	18−9h	54−27h
	2	6−3h	18−9h	63−27h

باقی $= R = 63-27h$

چونکہ '3' کثیر رقمی کا زیرو ہے لہٰذا باقی صفر ہوگا

$63-27h = 0$

$63 = 27h \Rightarrow h = \frac{63}{27} = \frac{7}{3} \Rightarrow h = \frac{7}{3}$

(ii) عدد '1' کثیر رقمی x^3-2hx^2+11 کا زیرو ہے

	1	−2h	0	11
1	↓	1	1−2h	1−2h
	1	1−2h	1−2h	12−2h

باقی $= R = 12-2h$

چونکہ '1' کثیر رقمی کا زیرو ہے لہٰذا $R = 0$

$12-2h = 0$

$12 = 2h \Rightarrow h = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow h = 6$

(iii) عدد '−1' کثیر رقمی $2x^3+5hx-23$ کا زیرو ہے

	2	0	5h	−23
−1	↓	−2	2	−5h−2
	2	−2	5h+2	−25−5h

باقی $= R = -25-5h$

چونکہ '−1' کثیر رقمی کا زیرو ہے لہٰذا $R = 0$

$-25-5h = 0$

$-25 = 5h \Rightarrow h = -\frac{25}{5} = -5 \Rightarrow h = -5$

Q#3

l اور m کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $(x-2)$ اور $(x+3)$ کثیر رقمی $x^3+4x^2+2lx+m$ کے اجزائے ضربی ہوں۔

چونکہ $(x-2)$ اور $(x+3)$ کثیر رقمی کے اجزائے ضربی ہیں لہٰذا '−3' اور '+2' کثیر رقمی کے زیرو ہیں۔

	1	4	2l	m
−3	↓	−3	−3	−6l+9
	1	1	2l−3	m−6l+9

$R = 0$ چونکہ 3- کثیر رقمی کا زیرو ہے لہٰذا

$m - 6l + 9 = 0$

$m - 6l = -9 \longrightarrow (i)$

2	1	4	$2l$	m
	↓	2	12	$4l+24$
	1	6	$2l+12$	$m+4l+24$

$R = 0$ چونکہ 2 کثیر رقمی کا زیرو ہے لہٰذا

$m+4l+24 = 0$

$m+4l = -24 \longrightarrow (ii)$

مساوات (i) اور (ii) کو تفریق کرنے سے

$m+4l = -24$

$\underline{-m \mp 6l = \pm 9}$

$10l = -15$

$l = -\frac{15}{10} = \frac{-3}{2} \Rightarrow \boxed{l = -\frac{3}{2}}$

مساوات (i) میں l کی قیمت درج کرنے سے

$m - 6l = -9$

$m - 6(-\frac{3}{2}) = -9$

$m + 9 = -9$

$m = -9-9 = -18 \Rightarrow \boxed{m = -18}$

(ii) $(x-1)$ اور $(x+1)$ کثیر رقمی $x^3 - 3lx^2 + 2mx + 6$ کے اجزائے ضربی ہوں۔

حل: چونکہ $(x-1)$ اور $(x+1)$ کثیر رقمی کے اجزائے ضربی ہیں لہٰذا '1' اور '-1' کثیر رقمی کے زیرو ہیں۔

1	1	$-3l$	$2m$	6
	↓	1	$-3l+1$	$2m-3l+1$
	1	$-3l+1$	$2m-3l+1$	$2m-3l+7$

$R = 0$ چونکہ '1' کثیر رقمی کا زیرو ہے لہٰذا

$2m - 3l + 7 = 0$

$2m - 3l = -7 \longrightarrow (i)$

-1	1	$-3l$	$2m$	6
	↓	-1	$3l+1$	$-2m-3l-1$
	1	$-3l-1$	$2m+3l+1$	$-2m-3l+5$

$R = 0$ چونکہ '-1' کثیر رقمی کا زیرو ہے لہٰذا

$-2m - 3l + 5 = 0$

$-2m - 3l = -5 \longrightarrow (ii)$

مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرنے سے

$2m - 3l = -7$

$\underline{-2m - 3l = -5}$

$-6l = -12$

$l = \frac{-12}{-6} = 2 \Rightarrow \boxed{l = 2}$

l کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$2m - 3l = -7$

$2m - 3(2) = -7$

$2m - 6 = -7$

$2m = -7 + 6 = -1$

$m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{2}}$

(10) **Q#4** بذریعہ ترکیبی تقسیم حل کیجئے

(i) عدد '2' مساوات $x^3 - 28x + 48 = 0$ کا روٹ ہو

چونکہ '2' دی گئی مساوات کا روٹ ہے لہٰذا

2	1	0	-28	48
	↓	2	4	-48
	1	2	-24	0

لہٰذا کم درجے والی مساوات ہے

$x^2 + 2x - 24 = 0$

$x^2 + 6x - 4x - 24 = 0$

$x(x+6) - 4(x+6) = 0$

$(x+6)(x-4) = 0$

$x+6 = 0$ or $x-4 = 0$

$x = -6$ $\quad x = 4$

پس 2، 4، 6- دی گئی مساوات کے روٹس ہیں۔

(ii) عدد '3' مساوات $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$ کا روٹ ہو

3	2	-3	-11	6
	↓	6	9	-6
	2	3	-2	0

لہٰذا کم درجے والی مساوات ہے

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

$2x^2 + 4x - x - 2 = 0$

$2x(x+2) - 1(x+2) = 0$

$(x+2)(2x-1) = 0$

$x+2 = 0$ or $2x-1 = 0$

$x = -2$ $\quad 2x = 1$

$x = 1/2$

پس 3، 2- اور 1/2 دی گئی مساوات کے روٹس ہیں۔

(iii) عدد '-1' مساوات $4x^3 - x^2 - 11x - 6 = 0$ کا روٹ ہو

-1	4	-1	-11	-6
	↓	-4	5	6
	4	-5	-6	0

لہٰذا کم درجے والی مساوات ہے

$4x^2 - 5x - 6 = 0$

$4x^2 - 8x + 3x - 6 = 0$

$4x(x-2) + 3(x-2) = 0$

$(x-2)(4x+3) = 0$

$x-2 = 0$ or $4x+3 = 0$

$x = 2$ $\quad 4x = -3$

$x = -3/4$

پس 1-، 2 اور 3/4- دی گئی مساوات کے روٹس ہیں۔

Q#5 '1' اور '3' مساوات $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ کے روٹس ہوں

حل:

1	1	0	-10	0	9
	↓	1	1	-9	-9
	1	1	-9	-9	0
3	↓	3	12	9	
	1	4	3	0	

اس لیے کم درجے والی مساوات ہے

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$x^2 + 3x + x + 3 = 0$

$x(x+3) + 1(x+3) = 0$

$(x+3)(x+1) = 0$

$x+3 = 0$ or $x+1 = 0$

$x = -3$ $\quad x = -1$

پس 1، 3، 3-، 1- دی گئی مساوات کے روٹس ہیں۔

www.pakcity.org

(iii) 3 اور 4- مساوات $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$ کے روٹس ہوں

3	1	2	-13	-14	24
	↓	3	15	6	-24
	1	5	2	-8	0
-4	↓	-4	-4	8	
	1	1	-2	0	

اس لیے کم درجے والی مساوات ہے

$x^2+x-2=0$

$x^2+2x-x-2=0$

$x(x+2)-1(x+2)=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x+2=0$ or $x-1=0$

$x=-2$ $\quad x=1$

پس 3 ، 4- ، 1 ، 2- دی گئی مساوات کے روٹس ہیں

Exercise 2.7

Q#1 $x+y=5 \longrightarrow (i)$; $x^2-2y-14=0 \longrightarrow (ii)$

مساوات (i) سے

$y=5-x \longrightarrow (iii)$

y کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$x^2-2y-14=0$

$x^2-2(5-x)-14=0$

$x^2-10+2x-14=0$

$x^2+2x-24=0$

$x^2+6x-4x-24=0$

$x(x+6)-4(x+6)=0$

$(x+6)(x-4)=0$

$x+6=0$ or $x-4=0$

$x=-6$ $\quad x=4$

جب $x=-6$ ہو تو مساوات (iii) سے

$y=5-x$

$y=5-(-6)$

$=5+6$

$=11$

$(-6,11)$

جب $x=4$ ہو تو

$y=5-x$

$y=5-4$

$=1$

$(4,1)$

S.set $=\{(-6,11),(4,1)\}$

Q#2 $3x-2y=1 \longrightarrow (i)$; $x^2+xy-y^2=1 \longrightarrow (ii)$

مساوات (i) سے

$3x=1+2y$

$x=\frac{1+2y}{3} \longrightarrow (iii)$

مساوات (ii) میں x کی قیمت درج کرنے سے

$x^2+xy-y^2=1$

$\left(\frac{1+2y}{3}\right)^2+\left(\frac{1+2y}{3}\right)y-y^2=1$

$\frac{1+4y^2+4y}{9}+\frac{y+2y^2}{3}-y^2=1$

9 سے ضرب دینے سے

$9\left(\frac{1+4y^2+4y}{9}\right)+9\left(\frac{y+2y^2}{3}\right)-9y^2=9$

$1+4y^2+4y+3y+6y^2-9y^2=9$

$4y^2+6y^2-9y^2+4y+3y+1-9=0$

$y^2+7y-8=0$

$y^2+8y-y-8=0$

$y(y+8)-1(y+8)=0$

(11) $(y+8)(y-1)=0$

$y+8=0$ or $y-1=0$

$y=-8$ $\quad y=1$

جب $y=-8$ ہو تو مساوات (iii) سے

$x=\frac{1+2y}{3}$

$x=\frac{1+2(-8)}{3}$

$=\frac{1-16}{3}$

$=-15/3$

$=-5$

$(-5,-8)$

جب $y=1$ ہو تو

$x=\frac{1+2y}{3}$

$=\frac{1+2(1)}{3}$

$=\frac{1+2}{3}$

$=3/3$

$=1$

$(1,1)$

S.set $=\{(-5,-8),(1,1)\}$

Q#3 $x-y=7 \longrightarrow (i)$; $\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=2 \longrightarrow (ii)$

مساوات (i) سے

$x=7+y \longrightarrow (iii)$

مساوات (ii) سے

$\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=2$

$\frac{2y-5x}{xy}=2$

$2y-5x=2xy \Rightarrow 2y-5x-2xy=0$

x کی قیمت درج کرنے سے

$2y-5(7+y)-2(7+y)y=0$

$2y-35-5y-14y-2y^2=0$

$-2y^2+2y-5y-14y-35=0$

$-2y^2-17y-35=0$

$2y^2+17y+35=0$

$2y^2+10y+7y+35=0$

$2y(y+5)+7(y+5)=0$

$(y+5)(2y+7)=0$

$y+5=0$ or $2y+7=0$

$y=-5$ $\quad 2y=-7$

$y=-7/2$

جب $y=-5$ ہو تو مساوات (iii) سے

$x=7+y$

$x=7-5$

$=2$

$(2,-5)$

جب $y=-7/2$ ہو تو

$x=7+y$

$=\frac{7}{1}-\frac{7}{2}$

$=\frac{14-7}{2}=\frac{7}{2}$

$(7/2,-7/2)$

S.set $=\{(2,-5),(\frac{7}{2},-\frac{7}{2})\}$

Q#4 $x+y=a-b \longrightarrow (i)$; $\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=2 \longrightarrow (ii)$

مساوات (i) سے

$y=a-b-x \longrightarrow (iii)$

مساوات (ii) سے

$\frac{ay-bx}{xy}=2$

$ay-bx=2xy$

$ay-bx-2xy=0$

y کی قیمت درج کرنے سے

$a(a-b-x)-bx-2x(a-b-x)=0$

$a^2-ab-ax-bx-2ax+2bx+2x^2=0$

$2x^2-ax-2ax-bx+2bx+a^2-ab=0$

$2x^2-3ax+bx+a^2-ab=0$

$2x^2-(3a-b)x+(a^2-ab)=0$

$a'=2,\ b'=-(3a-b),\ c'=a^2-ab$ کلیہ استعمال کرنے سے

$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-4a'c'}}{2a}$

$=\dfrac{-(-)(3a-b)\pm\sqrt{[-(3a-b)]^2-4(2)(a^2-ab)}}{2(2)}$

$=\dfrac{3a-b\pm\sqrt{9a^2+b^2-6ab-8a^2+8ab}}{4}$

$=\dfrac{3a-b\pm\sqrt{a^2+b^2+2ab}}{4}=\dfrac{3a-b\pm\sqrt{(a+b)^2}}{4}$

$=\dfrac{3a-b\pm(a+b)}{4}$

$x=\dfrac{3a-b+a+b}{4}$ یا $x=\dfrac{3a-b-a-b}{4}$

$=\dfrac{4a}{4}=a$; $=\dfrac{2a-2b}{4}=\dfrac{2(a-b)}{4}=\dfrac{a-b}{2}$

جب $x=a$ ہو تو مساوات (iii) سے

$y=a-b-x$

$=a-b-a$

$=-b$

$(a,-b)$

جب $x=\frac{a-b}{2}$ ہو تو

$y=a-b-x$

$y=a-b-\frac{a-b}{2}$

$=\frac{2a-2b-a+b}{2}$

$=\frac{a-b}{2}$

S.Set $=\{(a,-b),\ (\frac{a-b}{2},\frac{a-b}{2})\}$

Q#5

$x^2+(y-1)^2=10$ (i) ; $x^2+y^2+4x=1$ (ii)

$x^2+y^2+1-2y=10$ مساوات (i) سے

$x^2+y^2-2y=10-1$

$x^2+y^2-2y=9 \longrightarrow$ (iii)

مساوات (ii) اور (iii) کو تفریق کرنے سے

$x^2+y^2-2y=9$

$\pm x^2\pm y^2\pm 4x=\pm 1$

$-2y-4x=8$

$y+2x=-4$ -2 پر تقسیم کرنے سے

$y=-2x-4 \longrightarrow$ (iv)

y کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$x^2+y^2+4x=1$

$x^2+(-2x-4)^2+4x=1$

$x^2+4x^2+16+16x+4x-1=0$

$5x^2+20x+15=0$

$x^2+4x+3=0$ 5 پر تقسیم کرنے سے

$x^2+3x+x+3=0$

$x(x+3)+1(x+3)=0$

$(x+3)(x+1)=0$

$x+3=0$ or $x+1=0$

$x=-3$; $x=-1$

جب $x=-3$ ہو تو مساوات (iv) سے

$y=-2x-4$

$=-2(-3)-4$

$=6-4$

$=2$

$(-3,2)$

جب $x=-1$ ہو تو

$y=-2x-4$

$=-2(-1)-4$

$=2-4$

$=-2$

$(-1,-2)$

S.Set $=\{(-3,2),(-1,-2)\}$

Q#6

$(x+1)^2+(y+1)^2=5$; $(x+2)^2+y^2=5$

$x^2+1+2x+y^2+1+2y=5$; $x^2+4+4x+y^2=5$

$x^2+y^2+2x+2y=5-1-1$; $x^2+y^2+4x=5-4$

$x^2+y^2+2x+2y=3 \longrightarrow$ (i) ; $x^2+y^2+4x=1 \longrightarrow$ (ii)

مساوات (i) اور (ii) کو تفریق کرنے سے

$x^2+y^2+2x+2y=3$

$\pm x^2\pm y^2\pm 4x=\pm 1$

$-2x+2y=2$

$-x+y=1$

$y=1+x \longrightarrow$ (iii)

y کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$x^2+y^2+4x=1$

$x^2+(1+x)^2+4x=1$

$x^2+1+x^2+2x+4x=1$

$2x^2+6x=1-1$

$2x^2+6x=0$

$2x(x+3)=0$

$2x=0$ or $x+3=0$

$x=0$; $x=-3$

جب $x=0$ ہو تو مساوات (iii) سے

$y=1+x$

$y=1+0$

$=1$

$(0,1)$

جب $x=-3$ ہو تو

$y=1+x$

$=1-3$

$=-2$

$(-3,-2)$

S.Set $=\{(0,1),(-3,-2)\}$

Q#7

$x^2+2y^2=22$ (i) ; $5x^2+y^2=29 \longrightarrow$ (ii)

مساوات (ii) کو 2 سے ضرب دینے سے

$10x^2+2y^2=58$

$\pm x^2\pm 2y^2=\pm 22$

مساوات (i) کو تفریق کرنے سے

$9x^2=36$

$x^2=\frac{36}{9}=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

جب $x=2$ ہو تو مساوات (i) سے

$x^2+2y^2=22$

$(2)^2+2y^2=22$

$4+2y^2=22$

$2y^2=22-4$

$2y^2=18$

جب $x=-2$ ہو تو

$x^2+2y^2=22$

$(-2)^2+2y^2=22$

$4+2y^2=22$

$2y^2=22-4$

$2y^2=18$

$y^2 = \frac{18}{2}$

$y^2 = 9$

$y = \pm 3$

$(2,3), (2,-3)$

$y^2 = \frac{18}{2}$

$y^2 = 9$

$y = \pm 3$

$(-2,3), (-2,-3)$

S. Set $= \{(2,3), (2,-3), (-2,3), (-2,-3)\}$
$= \{\pm 2, \pm 3\}$

Q#8 $4x^2 - 5y^2 = 6 \to (i)$; $3x^2 + y^2 = 14 \to (ii)$

مساوات (ii) کو 5 سے ضرب دینے سے

$15x^2 + 5y^2 = 70$

مساوات (i) کو جمع کرنے سے

$4x^2 - 5y^2 = 6$

$19x^2 = 76$

$x^2 = \frac{76}{19} = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

جب $x=2$ ہو تو مساوات (ii) سے

$3x^2 + y^2 = 14$

$3(2)^2 + y^2 = 14$

$3(4) + y^2 = 14$

$12 + y^2 = 14$

$y^2 = 14 - 12$

$y^2 = 2$

$y = \pm\sqrt{2}$

$(2, \sqrt{2}) (2, -\sqrt{2})$

جب $x=-2$ ہو تو

$3x^2 + y^2 = 14$

$3(-2)^2 + y^2 = 14$

$3(4) + y^2 = 14$

$12 + y^2 = 14$

$y^2 = 14 - 12$

$y^2 = 2$

$y = \pm\sqrt{2}$

$(-2, \sqrt{2}), (-2, -\sqrt{2})$

S. Set $= \{(2,\sqrt{2}), (2,-\sqrt{2}), (-2,\sqrt{2}), (-2,-\sqrt{2})\}$
$= \{\pm 2, \pm\sqrt{2}\}$

Q#9 $7x^2 - 3y^2 = 4 \to (i)$; $2x^2 + 5y^2 = 7 \to (ii)$

مساوات (i) کو 5 سے اور (ii) کو 3 سے ضرب دینے سے

$35x^2 - 15y^2 = 20 \to (iii)$; $6x^2 + 15y^2 = 21 \to (iv)$

مساوات (iii) اور (iv) کو جمع کرنے سے

$35x^2 - 15y^2 = 20$

$6x^2 + 15y^2 = 21$

$41x^2 = 41$

$x^2 = \frac{41}{41} = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

جب $x=1$ ہو تو مساوات (ii) سے

$2x^2 + 5y^2 = 7$

$2(1)^2 + 5y^2 = 7$

$2(1) + 5y^2 = 7$

$2 + 5y^2 = 7$

$5y^2 = 7 - 2 = 5$

$y^2 = \frac{5}{5} = 1$

$y = \pm 1$

$(1,1), (1,-1)$

جب $x=-1$ ہو تو

$2x^2 + 5y^2 = 7$

$2(-1)^2 + 5y^2 = 7$

$2(1) + 5y^2 = 7$

$2 + 5y^2 = 7$

$5y^2 = 7 - 2 = 5$

$y^2 = 5/5 = 1$

$y = \pm 1$

$(-1,1), (-1,-1)$

S. Set $= \{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\}$
$= \{\pm 1, \pm 1\}$

Q#10 $x^2 + 2y^2 = 3 \to (i)$; $x^2 + 4xy - 5y^2 = 0 \to (ii)$

مساوات (ii) سے

$x^2 + 4xy - 5y^2 = 0$

$x^2 + 5xy - xy - 5y^2 = 0$

$x(x + 5y) - y(x + 5y) = 0$

$(x + 5y)(x - y) = 0$

$x + 5y = 0$ or $x - y = 0$

$x = -5y$, $x = y$

x کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$x^2 + 2y^2 = 3$

$(-5y)^2 + 2y^2 = 3$

$25y^2 + 2y^2 = 3$

$27y^2 = 3$

$y^2 = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$

$y = \pm\frac{1}{3}$

جب $y = \frac{1}{3}$ ہو

$x = -5y$

$x = -5(\frac{1}{3})$

$= -\frac{5}{3}$

$(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$

جب $y = -\frac{1}{3}$ ہو

$x = -5y$

$= -5(-\frac{1}{3})$

$= \frac{5}{3}$

$(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$

x کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$x^2 + 2y^2 = 3$

$(y)^2 + 2y^2 = 3$

$y^2 + 2y^2 = 3$

$3y^2 = 3$

$y^2 = \frac{3}{3}$

$y = \pm 1$

جب $y=1$ ہو تو

$x = y$

$= 1$

$(1,1)$

جب $y=-1$ ہو

$x = y$

$= -1$

$(-1,-1)$

S. Set $= \{(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}), (1,1), (-1,-1)\}$

Q#11 $3x^2 - y^2 = 26 \to (i)$; $3x^2 - 5xy - 12y^2 = 0 \to (ii)$

مساوات (ii) سے

$3x^2 - 5xy - 12y^2 = 0$

$3x^2 - 9xy + 4xy - 12y^2 = 0$

$3x(x - 3y) + 4y(x - 3y) = 0$

$(x - 3y)(3x + 4y) = 0$

$x - 3y = 0$ or $3x + 4y = 0$

$x = 3y$, $3x = -4y$

$x = -\frac{4y}{3}$

x کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$3x^2 - y^2 = 26$

$3(3y)^2 - y^2 = 26$

$3(9y^2) - y^2 = 26$

$27y^2 - y^2 = 26$

$26y^2 = 26$

$y^2 = \frac{26}{26} = 1$

$y = \pm 1$

جب $y=1$ ہو تو

$x = 3y$

$x = 3(1)$

$= 3$

جب $y=-1$ ہو تو

$x = 3y$

$= 3(-1)$

$= -3$

x کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$3x^2 - y^2 = 26$

$3(-\frac{4y}{3})^2 - y^2 = 26$

$3(\frac{16y^2}{9}) - y^2 = 26$

$\frac{16y^2}{3} - y^2 = 26$

$16y^2 - 3y^2 = 78$

$13y^2 = 78$

$y^2 = \frac{78}{13} = 6$

$y = \pm\sqrt{6}$

$(3,1)$ | $(-3,-1)$

جب $y=\sqrt{6}$ ہو
$x=\frac{-4y}{3}$
$x=\frac{-4(\sqrt{6})}{3}$
$=-\frac{4}{3}\sqrt{6}$
$(-\frac{4}{3}\sqrt{6}, \sqrt{6})$

جب $y=-\sqrt{6}$ ہو
$x=\frac{-4y}{3}$
$=\frac{-4(-\sqrt{6})}{3}$
$=\frac{4}{3}\sqrt{6}$
$(\frac{4}{3}\sqrt{6}, -\sqrt{6})$

S.set $=\{(3,1),(-3,-1),(-\frac{4}{3}\sqrt{6},\sqrt{6}),(\frac{4}{3}\sqrt{6},-\sqrt{6})\}$

Q #12
$x^2+xy=5 \rightarrow$ (i) ; $y^2+xy=3 \rightarrow$ (ii)

مساوات (i) کو 3 سے اور (ii) کو 5 سے ضرب دینے سے

$3x^2+3xy=15 \rightarrow$ (iii) ; $5y^2+5xy=15 \rightarrow$ (iv)

مساوات (iii) سے (iv) کو تفریق کرنے سے

$3x^2+3xy=15$
$\pm 5y^2 \pm 5xy = \pm 15$
$3x^2-5y^2-2xy=0$
$3x^2-2xy-5y^2=0$
$3x^2-5xy+3xy-5y^2=0$
$x(3x-5y)+y(3x-5y)=0$
$(3x-5y)(x+y)=0$
$3x-5y=0$ or $x+y=0$
$3x=5y$; $x=-y$
$x=\frac{5y}{3}$

جب $x=\frac{5}{3}y$ ہو تو مساوات ii
$y^2+xy=3$
$y^2+(\frac{5}{3}y)y=3$
$y^2+\frac{5y^2}{3}=3$
$3y^2+5y^2=9$
$8y^2=9$
$y^2=\frac{9}{8}$
$y=\pm\sqrt{\frac{9}{8}}$
$=\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$

جب $x=-y$ ہو تو مساوات (ii) سے
$y^2+xy=3$
$y^2+(-y)(y)=3$
$y^2-y^2=3$
$0=3$

جب $y=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ ہو
$x=\frac{5}{3}y$
$=\frac{5}{3}(\frac{3}{2\sqrt{2}})$
$=\frac{5}{2\sqrt{2}}$
$(\frac{5}{2\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}})$

جب $y=-\frac{3}{2\sqrt{2}}$ ہو
$x=\frac{5}{3}y$
$=\frac{5}{3}(-\frac{3}{2\sqrt{2}})$
$=\frac{-5}{2\sqrt{2}}$
$(\frac{-5}{2\sqrt{2}},\frac{-3}{2\sqrt{2}})$

S.set $=\{(\frac{5}{2\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}}),(\frac{-5}{2\sqrt{2}},\frac{-3}{2\sqrt{2}})\}$

Q #13
$x^2-2xy=7 \rightarrow$ (i) ; $xy+3y^2=2 \rightarrow$ (ii)

مساوات (i) کو 2 سے اور (ii) کو 7 سے ضرب دینے سے

$2x^2-4xy=14 \rightarrow$ (iii) ; $7xy+21y^2=14 \rightarrow$ (iv)

مساوات (iii) اور (iv) کو تفریق کرنے سے
$2x^2-4xy=14$
$\pm 21y^2 \pm 7xy = \pm 14$
$2x^2-21y^2-11xy=0$
$2x^2-11xy-21y^2=0$
$2x^2-14xy+3xy-21y^2=0$
$2x(x-7y)+3y(x-7y)=0$
$(x-7y)(2x+3y)=0$
$x-7y=0$ or $2x+3y=0$
$x=7y$; $2x=-3y$
$x=-\frac{3}{2}y$

مساوات (ii) میں x کی قیمت درج کرنے سے
$xy+3y^2=2$
$(7y)y+3y^2=2$
$7y^2+3y^2=2$
$10y^2=2$
$y^2=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$
$y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

جب $y=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ہو تو
$x=7y$
$x=7(\frac{1}{\sqrt{5}})$
$=\frac{7}{\sqrt{5}}$
$(\frac{7}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$

جب $y=-\frac{1}{\sqrt{5}}$
$x=7y$
$=7(-\frac{1}{\sqrt{5}})$
$=-\frac{7}{\sqrt{5}}$
$(-\frac{7}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$

مساوات (ii) میں x کی قیمت درج کرنے سے
$xy+3y^2=2$
$(-\frac{3}{2}y)y+3y^2=2$
$-\frac{3}{2}y^2+3y^2=2$
$-3y^2+6y^2=4$
$3y^2=4$
$y^2=\frac{4}{3}$
$y=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

جب $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ہو
$x=-\frac{3}{2}y$
$=-\frac{3}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}})$
$=\frac{-3}{\sqrt{3}}$
$=\frac{-\sqrt{3\times3}}{\sqrt{3}}$
$=-\sqrt{\frac{3\times3}{3}}$
$=-\sqrt{3}$
$(-\sqrt{3},\frac{-3}{\sqrt{3}})$

جب $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ ہو
$x=-\frac{3}{2}y$
$=-\frac{3}{2}(\frac{-2}{\sqrt{3}})$
$=\frac{3}{\sqrt{3}}$
$=\frac{\sqrt{3\times3}}{\sqrt{3}}$
$=\sqrt{\frac{3\times3}{3}}$
$=\sqrt{3}$
$(\sqrt{3},\frac{3}{\sqrt{3}})$

S.set $=\{(\frac{7}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}),(\frac{-7}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}),(-\sqrt{3},\frac{-3}{\sqrt{3}}),(\sqrt{3},\frac{3}{\sqrt{3}})\}$

Exercise 2.8

Q #1
دو مسلسل مثبت اعداد کا حاصل ضرب 182 ہے۔ اعداد معلوم کریں

فرض کیا دو مسلسل مثبت اعداد $= x, x+1$

بشرط سوال
$(x)(x+1)=182$
$x^2+x-182=0$
$x^2+14x-13x-182=0$ (اسے کیلکولیٹر سے بھی حل کیا جا سکتا ہے)

182×1
91×2
26×7
14×13

$x(x+14)-13(x+14)=0$
$(x+14)(x-13)=0$
$x+14=0$ or $x-13=0$
$x=-14$; $x=13$

کیونکہ x مثبت ہے لہٰذا $x\neq-14$ پس $x=13$

پس مطلوبہ اعداد $= x = 13$
$x+1=13+1=14$ مطلوبہ اعداد $=13, 14$

Q#2
تین مسلسل مثبت اعداد کے مربعوں کا مجموعہ 77 ہے اعداد معلوم کیجئے۔

فرض کیا اعداد $= x, x+1, x+2$

بشرط سوال

$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=77$

$x^2+x^2+1+2x+x^2+4+4x=77$

$3x^2+6x+5-77=0$

$3x^2+6x-72=0$

3 پر تقسیم کرنے سے

$x^2+2x-24=0$

24×1, 12×2, 8×3, $+6\times4$

$x^2+6x-4x-24=0$

$x(x+6)-4(x+6)=0$

$(x+6)(x-4)=0$

$x+6=0$ or $x-4=0$

$x=-6$ $x=4$

چونکہ x مثبت عدد ہے لہذا $x\neq-6$ پس $x=4$

مطلوبہ اعداد $= x = 4$

$x+1=4+1=5$

$x+2=4+2=6$ (4, 5, 6)

Q#3
ایک عدد کے 5 گنا اور اس کے مربع کا مجموعہ 204 ہے۔ عدد معلوم کریں۔

فرض کیا عدد $= x$

عدد کا 5 گنا $= 5x$

عدد کا مربع $= x^2$

بشرط سوال

$x^2+5x=204$

$x^2+5x-204=0$

(کلیہ سے بھی حل کیا جا سکتا ہے)

204×1, 102×2, 68×3, 51×4, 34×6, 28×8, $+17\times12$

$x^2+17x-12x-204=0$

$x(x+17)-12(x+17)=0$

$(x+17)(x-12)=0$

$x+17=0$ or $x-12=0$

$x=-17$ $x=12$

پس مطلوبہ عدد $= 12, -17$

Q#4
ایک عدد کے 3 گنا سے 5 کم اور 4 گنا سے 1 کم کا حاصل ضرب 7 ہے عدد معلوم کریں۔

فرض کیا عدد $= x$

عدد کا 3 گنا $= 3x$

3 گنا سے 5 کم $= 3x-5$

عدد کا 4 گنا $= 4x$

4 گنا سے 1 کم $= 4x-1$

بشرط سوال

$(3x-5)(4x-1)=7$

$12x^2-3x-20x+5=7$

$12x^2-23x+5-7=0$

$12x^2-23x-2=0$

$12x^2-24x+x-2=0$

$12x(x-2)+1(x-2)=0$

$(x-2)(12x+1)=0$

$x-2=0$ or $12x+1=0$

$x=2$ $12x=-1$

$x=-\frac{1}{12}$

پس مطلوبہ عدد $= 2, -\frac{1}{12}$

Q#5
ایک عدد اور اس کے معکوس کا فرق $\frac{15}{4}$ ہے عدد معلوم کریں

فرض کیا عدد $= x$

عدد کا معکوس $= \frac{1}{x}$

بشرط سوال

$x-\frac{1}{x}=\frac{15}{4}$

4x سے ضرب دینے سے

$4x^2-4=15x$

$4x^2-15x-4=0$

$4x^2-16x+x-4=0$

$4x(x-4)+1(x-4)=0$

$(x-4)(4x+1)=0$

$x-4=0$ or $4x+1=0$

$x=4$ $4x=-1$

$x=-\frac{1}{4}$

پس مطلوبہ عدد $= 4, -\frac{1}{4}$

Q#6
ایک مثبت صحیح عدد کے دو ہندسوں کے مربعوں کا مجموعہ 65 ہے اور عدد اپنے ہندسوں کے مجموعے کا 9 گنا ہے۔ عدد معلوم کریں۔

فرض کیا ہندسے $= x, y$

دہائی کا ہندسہ $= y$ ، اکائی کا ہندسہ $= x$

مثبت صحیح عدد $= x+10y$

پہلی شرط

$x^2+y^2=65 \longrightarrow (i)$

دوسری شرط

$x+10y=9(x+y)$

$x+10y=9x+9y$

$x+10y-9x-9y=0$

$-8x+y=0$

$y=8x \longrightarrow (ii)$

y کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$x^2+y^2=65$

$x^2+(8x)^2=65$

$x^2+64x^2=65 \Rightarrow 65x^2=65$

$x^2=\frac{65}{65}$

$x^2=1$

$x=\pm1$

چونکہ x مثبت عدد ہے لہذا $x\neq-1$ پس $x=1$

x کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$y=8x$

$y=8(1)$

$y=8$

پس مطلوبہ عدد $= x+10y$

$= 1+10(8)$

$= 1+80$

$= 81$

Q#7
ایک نقطہ کے محددات کا مجموعہ 9 اور ان کے مربعوں کا مجموعہ 45 ہے۔ نقطہ کے محددات معلوم کریں۔

فرض کیا نقطہ کے محددات $= (x, y)$

بشرط سوال

$x+y=9 \longrightarrow (i)$

$x^2+y^2=45 \longrightarrow (ii)$

مساوات (i) سے

$y=9-x \longrightarrow (iii)$

y کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$x^2+y^2=45$

$x^2+(9-x)^2=45$

$x^2+81+x^2-18x=45$

www.pakcity.org EDUCATION pakcity.org

$2x^2-18x+81-45=0$

$2x^2-18x+36=0$

$x^2-9x+18=0$ (2 پر تقسیم کرنے سے)

$x^2-6x-3x+18=0$

$x(x-6)-3(x-6)=0$

$(x-6)(x-3)=0$

$x-6=0$ or $x-3=0$

$x=6$, $x=3$

مساوات (ii) میں x کی قیمتیں درج کرنے سے

جب $x=6$ ہو تو

$y=9-x$

$y=9-6$

$=3$ (6,3)

جب $x=3$ ہو تو

$y=9-x$

$=9-3$

$=6$ (3,6)

پس نقطہ کے محددات = (6,3) یا (3,6)

Q#8

دو صحیح اعداد کا مجموعہ 9 اور ان کے مربعوں کا فرق بھی 9 ہے۔ اعداد معلوم کریں۔

فرض کیا صحیح اعداد = x, y

بشرط سوال

$x+y=9 \longrightarrow (i)$

$x^2-y^2=9$

$(x+y)(x-y)=9 \longrightarrow (ii)$

مساوات (ii) میں $(x+y)$ کی قیمت درج کرنے سے

$9(x-y)=9$

$x-y=\frac{9}{9}$

$x-y=1 \longrightarrow (iii)$

مساوات (i) اور (iii) کو جمع کرنے سے

$x+y=9$

$x-y=1$

$2x=10$

$x=\frac{10}{2}=5 \Rightarrow \boxed{x=5}$

x کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$x+y=9$

$5+y=9$

$y=9-5$

$\boxed{y=4}$

پس مطلوبہ اعداد = 5, 4

Q#9

دو صحیح اعداد کا فرق 4 ہے اور ان کے مربعوں کا فرق 72 ہے۔ اعداد معلوم کریں۔

فرض کیا اعداد = x, y

بشرط سوال

$x-y=4 \longrightarrow (i)$

$x^2-y^2=72 \longrightarrow (ii)$

$(x+y)(x-y)=72$

$(x+y)(4)=72$

$x+y=\frac{72}{4} \Rightarrow x+y=18 \longrightarrow (iii)$

مساوات (i) اور (iii) کو جمع کرنے سے

$x-y=4$

$x+y=18$

$2x=22$

$x=\frac{22}{2} \Rightarrow \boxed{x=11}$

x کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$x-y=4$

$11-y=4$

$-y=4-11$

$-y=-7 \Rightarrow \boxed{y=7}$

پس مطلوبہ اعداد = 11, 7

Q#10

ایک مستطیل کے اضلاع معلوم کیجئے جس کا احاطہ 80 سم اور اس کا رقبہ 375 مربع سم ہے۔

فرض کیا مستطیل کے اضلاع = x, y

مستطیل کا احاطہ = 80 سم

مستطیل کا رقبہ = 375 مربع سم

ہم جانتے ہیں

مستطیل کا احاطہ = 2(لمبائی + چوڑائی)

$2(x+y)=80$

$x+y=\frac{80}{2}=40$

$y=40-x \longrightarrow (i)$

مستطیل کا رقبہ = $xy=375$

y کی قیمت درج کرنے سے

$x(40-x)=375$

$40x-x^2=375$

$40x-x^2-375=0$

$x^2-40x+375=0$

$x^2-25x-15x+375=0$

$x(x-25)-15(x-25)=0$

$(x-25)(x-15)=0$

$x-25=0$ or $x-15=0$

$x=25$, $x=15$

x کی قیمتیں درج کرنے سے

جب $x=25$ ہو تو

$y=40-x$

$=40-25$

$=15$

جب $x=15$ ہو تو

$y=40-x$

$=40-15$

$=25$

پس مستطیل کے اضلاع = 25 سم، 15 سم یا 15 سم، 25 سم

متفرق مشق 2

Q#2 (i)

روٹس کی اقسام پر بحث کریں۔

(a) $x^2+3x+5=0$

$a=1, b=3, c=5$

$Disc.=b^2-4ac$

$=(3)^2-4(1)(5)$

$=9-20$

$=-11<0$

روٹس غیر حقیقی ہیں۔

(b) $2x^2-7x+3=0$

$a=2, b=-7, c=3$

$Disc=b^2-4ac$

$=(-7)^2-4(2)(3)$

$=49-24$

$=25$

$=(5)^2>0$ مکمل مربع

روٹس حقیقی اور ناطق ہیں۔

(c) $x^2+6x-1=0$

$a=1, b=6, c=-1$

$Disc=b^2-4ac$

$=(6)^2-4(1)(-1)$

$=36+4$

$=40>0$

روٹس حقیقی اور غیر ناطق ہیں۔

(d) $16x^2-8x+1=0$

$a=16, b=-8, c=1$

$Disc=b^2-4ac$

$=(-8)^2-4(16)(1)$

$=64-64$

$=0$

روٹس برابر اور حقیقی ہیں۔

(ii) اگر $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ہو تو ω^2 معلوم کریں۔

$(\omega)^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2$

$\omega^2 = \frac{(-1)^2+(\sqrt{-3})^2+2(-1)(\sqrt{-3})}{4}$

$= \frac{1-3-2\sqrt{-3}}{4} = \frac{-2-2\sqrt{-3}}{4} = \frac{2(-1-\sqrt{-3})}{4_2}$

$= \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

(iii) ثابت کریں کہ اکائی کے تمام جذرالمکعب کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ اکائی کے جذرالمکعب 1، ω اور ω^2 ہوتے ہیں

لہٰذا ہم نے ثابت کرنا ہے کہ $LHS = 1+\omega+\omega^2 = 0$

$1+\omega+\omega^2 = 1 + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

$= \frac{2-1+\sqrt{-3}-1-\sqrt{-3}}{2}$ $\because \omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

$= \frac{2-2+\sqrt{-3}-\sqrt{-3}}{2}$

$= \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow 1+\omega+\omega^2 = 0$

(iv) اکائی کے غیر حقیقی جذرالمکعب کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل: اکائی کے غیر حقیقی جذرالمکعب ω اور ω^2 ہیں لہٰذا ان کا حاصل ضرب $(\omega)(\omega^2)$

$(\omega)(\omega^2) = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$

$\omega^3 = \frac{(-1)^2-(\sqrt{-3})^2}{2\times 2} = \frac{1-(-3)}{4} = \frac{1+3}{4}$

$= \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow (\omega)(\omega^2) = \omega^3 = 1$

(v) Same as Exercise 2.2 Q #3

(vi) $\omega^{37}+\omega^{38}+1 = ?$

$= \omega^{36}\cdot\omega + \omega^{36}\cdot\omega^2 + 1 = (\omega^3)^{12}\cdot\omega + (\omega^3)^{12}\cdot\omega^2 + 1$

$= (1)^{12}\cdot\omega + (1)^{12}\cdot\omega^2 + 1 = 1\omega + 1\omega^2 + 1$

$= 1+\omega+\omega^2 = 0$

(vii) $(1-\omega+\omega^2)^6 = ?$

$= [(1+\omega^2)-\omega]^6 = [(-\omega)-\omega]^6$ $\because 1+\omega^2 = -\omega$

$= (-2\omega)^6 = (-2)^6\cdot\omega^6 = 64(\omega^3)^2$

$= 64(1)^2 = 64(1) = 64$

(viii) اگر ω اکائی کا جذرالمکعب ہو تو ایسی مساوات بنائیں جس کے روٹس 3ω اور $3\omega^2$ ہوں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ اگر ω اکائی کا جذرالمکعب کا روٹ ہو تو

$1+\omega+\omega^2 = 0$ & $\omega^3 = 1$

کیونکہ 3ω اور $3\omega^2$ مطلوبہ روٹس ہیں اس لیے

روٹس کا مجموعہ $= 3\omega + 3\omega^2$

$S = 3(\omega+\omega^2) = 3(-1) = -3$

روٹس کا حاصل ضرب $= (3\omega)(3\omega^2)$

$P = 9\omega^3 = 9(1) = 9$

$x^2 - Sx + P = 0$ مطلوبہ مساوات

$x^2 - (-3)x + 9 = 0$

$x^2 + 3x + 9 = 0$

(ix) ترکیبی تقسیم کی مدد سے باقی اور حاصل قسمت معلوم کریں:

$(x^3+3x^2+2) \div (x-2)$ $x-a = x-2$, $a = 2$

2	1	3	0	2
	↓	2	10	20
	1	5	10	22

باقی $= R = 22$ حاصل قسمت $= Q(x) = x^2+5x+10$

(x) ترکیبی تقسیم کی مدد سے ثابت کریں کہ $(x-2)$، x^3+x^2-7x+2 کا جزو ضربی ہے

2	1	1	−7	2
	↓	2	6	−2
	1	3	−1	0

$(x-2)$ $x-a = x-2$, $a = 2$

کیونکہ باقی صفر ہے لہٰذا $(x-2)$ کثیر رقمی کا جزو ضربی ہے۔

(xi) مساوات $2px^2+3qx-4r=0$ کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کریں۔

$a = 2p,\ b = 3q,\ c = -4r$

اگر α، β مساوات کے روٹس ہوں تو

روٹس کا مجموعہ $= \alpha+\beta = -\frac{b}{a}$

$= \frac{-3q}{2p}$

روٹس کا حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-4r}{2p} = \frac{-2r}{p}$

(xii) اگر α اور β مساوات x^2-4x+3 کے روٹس ہوں تو $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل: فرض کیں α، β مساوات کے روٹس ہیں $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$

مجموعہ $= \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-4)}{1} = 4$

حاصل ضرب $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$

$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$= \frac{(4)^2-2(3)}{(3)^2} = \frac{16-6}{9} = \frac{10}{9}$

(xiii) اگر α اور β مساوات $4x^2-3x+6=0$ کے روٹس ہوں تو معلوم کریں

حل: فرض کیا α، β مساوات کے روٹس ہیں $a = 4$, $b = -3$, $c = 6$

$\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3)}{4} = \frac{3}{4}$

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

(a) $\alpha^2+\beta^2 = ?$

$= \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta$

$= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^2-2\left(\frac{3}{2}\right)$

$= \frac{9}{16}-\frac{3}{1}$

$= \frac{9-48}{16}$

$= \frac{-39}{16}$

(b) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

$= \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$= \frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$= \frac{(3/4)^2-2(3/2)}{3/2}$

$= \frac{\frac{9}{16}-\frac{3}{1}}{3/2}$

$= \frac{\frac{9-48}{16}}{3/2}$

$= \frac{-39}{16_8}\times\frac{2}{3} = -\frac{13}{8}$

(c) $\alpha-\beta$

$= \sqrt{(\alpha-\beta)^2}$

$= \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$= \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-4\left(\frac{3}{2}\right)}$

$= \sqrt{\frac{9}{16}-\frac{6}{1}}$

$= \sqrt{\frac{9-96}{16}}$

$= \sqrt{\frac{-87}{16}}$

$= \frac{\sqrt{-87}}{4}$

06/8/13